Mathematische Funktionen

Viele Schüler können sich unter diesem Phänomen überhaupt nichts vorstellen, und da zusätzlich mit Buchstaben gerechnet wird, erzeugt es eher sogar Horror. Das ist jedoch gar nicht so wild, wie im Folgenden gezeigt werden soll!

Buchstaben verwendet man immer nur als stellvertretendes Zeichen für eine Zahl, die zum aktuellen Zeitpunkt (noch) nicht festgelegt ist.

Gedanke:

es gibt für eine Problemstellung eine Gesetzmäßigkeit (Rechenregel), mit der man aus einem Eingabewert immer einen entsprechenden Ausgabewert berechnen kann.

Eingabe $\Rightarrow$ $\boxed{\text{Formel}}$ Ausgabe $\Rightarrow$

Die einzugebende Zahl nennen wir x und die ausgegebene Zahl nennen wir y oder auch f(x). Das bedeutet Funktion – abhängig von x.

Mathematische Darstellung:

$$f(x) = a * x^3 + b * x^2 + c * x + d$$

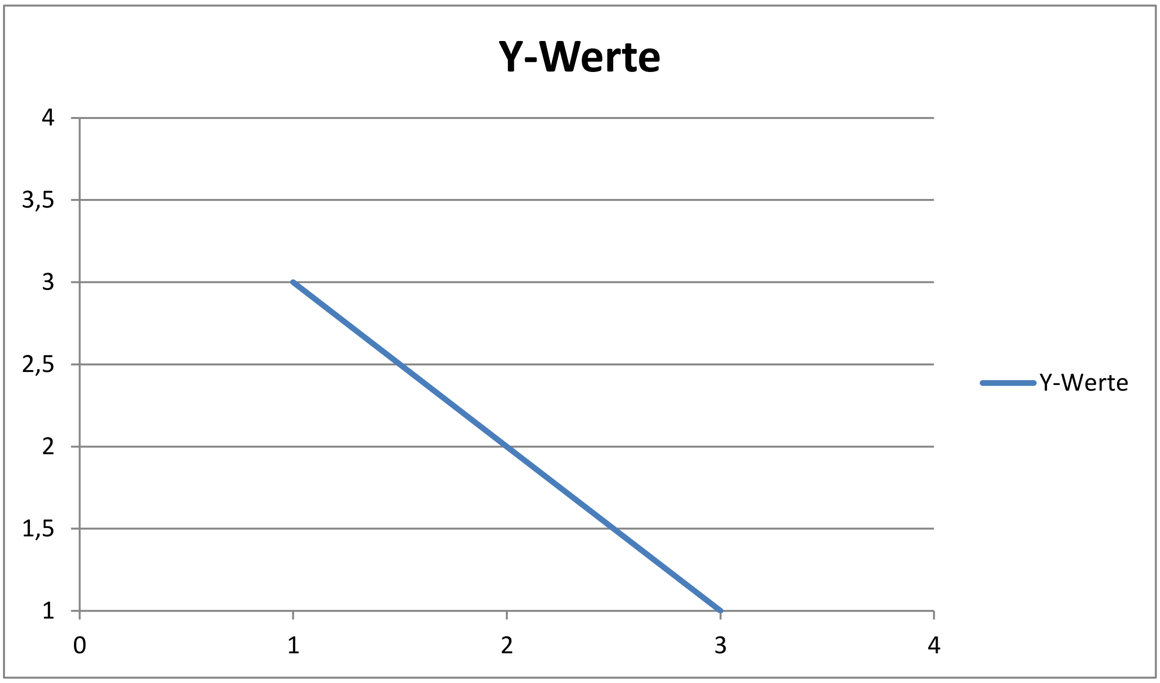
hierbei sind a, b, c, d irgendwelche Zahlen. Wenn man nun für x irgendeine Zahl vorgibt, kann man ein eindeutiges Ergebnis berechnen.
a, b, c und d können auch den Wert 0 enthalten.

Entweder steht eine solche Funktion schon zu Beginn fest und man kann y-Werte berechnen, oder es sind bestimmte Paare (x/y) vorgegeben und man kann daraus eine eindeutige Formel berechnen.

Grafische Darstellung:

Wenn man solche x/y-Wertepaare zeichnen will, verwendet man ein Koordinatensystem mit einer horizontalen x-Achse und einer vertikalen y-Achse.

Man trägt die Werte als Punkte ein. Und anschließend kann man eine geschwungene Linie durch die Punkte zeichnen. Dies ist dann die grafische Anzeige einer solchen Funktion.



Komplexität einer Funktion

Der Begriff leitet sich von dem höchsten Potenz-Grad der Variablen x ab, der in der Funktionsgleichung vorkommt.

Beispiel:

- hat man eine Funktion $f(x)=3x+4$, so hat x die Potenz 1, man spricht dann auch von einer linearen Gleichung
- die Funktion $f(x)= 5x^2+6x +7$ hat die Potenz 2, man nennt sie quadratische Funktion

Wenn man eine eindeutige Funktion mit der Potenz n erzeugen möchte, so müssen (n+1) Punkte vorhanden sein. Das kann man sich leicht verdeutlichen: Wenn man 2 Punkte in ein Koordinatensystem einträgt, wie viele Geraden gibt es, die beide Punkte schneiden? – Es gibt nur eine eindeutige Gerade! Und eine Gerade ist das Bild einer linearen Funktion – also mit der Potenz 1

Rechnen mit Gleichungen

Mit einer Gleichung kann man Rechnungen ausführen, wenn man diese auf jeder der beiden Seiten ausführt. So kann man auf der Formel a=b die Rechnung (+3) ausführen.
Die Formel würde dann lauten a+3 = b+3, sie ist aber immer noch genauso gültig.

Gleichsetzen von Gleichungen

Eine Gleichung besteht immer aus einem linken Teil, einem =-Zeichen und einem rechten Teil. Wenn man nun zwei Gleichungen hat, die auf einer Seite das gleiche stehen haben, so kann man diese auch zusammenfassen.

Beispiel:

a = b und b = c bedeutet, a = c

Auflösen von Gleichungen nach einer Variablen

Unter diesem Begriff versteht man den Versuch, eine Gleichung durch Ausführung von Berechnungen so umzuschreiben, dass die unbekannte Variable nur noch auf einer Seite vorkommt. Durch die einzelnen Rechnungen wird ja das Ergebnis nicht verändert, es dient nur zu einer größeren Übersichtlichkeit.
Die Berechnung wird normalerweise rechts neben einen Längsstrich notiert, um eine gewisse Übersichtlichkeit zu gewährleisten. Sie wird dann auf beiden Seiten des Gleichzeichens durchgeführt.

Beispiel:	4*a + 12	= 7*a + 3	|-(4*a)
	12	= 3*a + 3	|-3
	9	= 3*a	|/3
	3	= a	

Jetzt haben wir für die unbekannte Variable a also das eindeutige Ergebnis 3 gefunden. Natürlich kann es auch mehrere unbekannte Variablen geben. Man beginnt hierbei, dass man die Variablen der Reihe nach berechnet.

Bestimmen einer Funktion

- Wir wollen nun aus einer vorgegebenen Menge an Punkten eine Funktion bestimmen. Die Punkte lauten P1(2/3), P2(3/5)
- Wir können also eine Funktion mit der Potenz 1 erzeugen – eine lineare Funktion. Diese hat den allgemeinen Aufbau f(x) = ax+b
- Nun setzen wir die vorhandenen Punkte (x/y) in die allgemeine Gleichung ein:
  a) 3 = a*2 + b
  b) 5 = a*3 + b
  aber alle Gleichungen haben aktuell noch 2 unbekannte Variablen
- Jetzt lösen wir die erste Gleichung nach b auf, sie lautet dann:
  b = 3-a*2
- Dies können wir dann in die zweite Gleichung einsetzen:
  5 = a*3 + (3-a*2)
- Jetzt lösen wir die Gleichung auf nach a:
  5 = 3a + 3 – 2a |-3
  2 = a
- Und prompt haben wir einen eindeutigen Wert für a. Diesen setzen wir jetzt in eine der beiden anderen Gleichungen ein und bekommen so auch einen eindeutigen Wert für b:
  3 = 2a + b |a=2
  3 = 4 +b |-4
  b = -1
- Nun haben wir also einen eindeutigen Wert für a und für b berechnet und können diesen in die allgemeine Gleichung einsetzen
  f(x) = ax + b
  f(x) = 2x + b
  f(x) = 2x – 1

Es liegt immer im Ermessen des Lösers, nach welcher Reihenfolge er die Variablen zuerst auflöst und in welche der vorhandenen Gleichung er das Ergebnis dann einsetzt. Man hätte also auch zuerst b berechnen können und danach erst a

Je nach Auswahl der Reihenfolge und der verwendeten Funktionen, kann es sein, dass die Berechnung einfacher oder übersichtlicher wird, bspw. weil keine Kommazahlen auftreten. Manchen Leuten liegen möglicherweise auch bestimmt Rechnungen mehr – und sie rechnen beispielsweise lieber mit Potenzen statt mit Wurzeln.

Zum korrekten Ergebnis kommt man auf jeden Fall. Durch Übung bekommt man auch schnell ein Gefühl dafür, welche Auswahl man trifft.

Rechenregeln

Um verschiedene Berechnungen an Gleichungen durchführen zu können, sind gewisse Rechenregeln notwendig, die immer beachtet werden müssen. Die wichtigsten sind in den folgenden Punkten aufgezählt (es gibt natürlich noch mehrere).
Zu Beginn mag dies alles sehr kompliziert aussehen, aber es sind eigentlich nur Schreibweisen, die oft ziemlich ungewohnt und fremd anmuten. Man kann sich schnell daran gewöhnen.

- Kommutativgesetz: $a + b = b + a, \quad a*b = b*a$
- Distributivgesetz: $a * b + a * c = a * (b + c)$
- Punkt-vor-Strich: $a * b + c = (a * b) + c$
- Minusklammer: $a - (b + c) = a - b - c$
- Kürzen/Erweitern: $\frac{a}{b} = \frac{a*c}{b*c}$
- Hauptnenner: $\left(\frac{a}{b}\right) + \left(\frac{c}{d}\right) = \frac{a*d}{b*d} + \frac{c*b}{d*b} = \frac{(a*d)+(c*b)}{(b*d)}$
- Potenzen: $a^{-b} = \frac{1}{a^b}, \qquad a^0 = 1$
- Potenzen: $(a^b)^c = a^{b*c}$
- Potenzen: $a^b * a^c = a^{b+c}$
- Potenzen: $\frac{a^c}{b^c} = \left(\frac{a}{b}\right)^c$
- Wurzel: $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$

Ableitung einer Formel

Aktuell haben wir eine eindeutige Funktion. Wir können also für einen gegebenen x-Wert einen eindeutigen y-Wert berechnen. Das Ergebnis können wir als eine Kurve darstellen.

Wenn man nun diese Kurve betrachtet, so könnte man sich die Frage stellen, ob man statt dem y-Wert auch die Steigung der Kurve an einem bestimmten x-Wert feststellen kann. Die Steigung kann man sich vorstellen als den Winkel einer Linie, die an dem x-Wert die Kurve berührt. Man nennt solch eine Linie auch Tangente. Diese neue Formel für eine Kurve nennt man Ableitung und zeigt dies durch das Hinzufügen eines Hochkommas.

Und man hat herausgefunden, dass man aus einer beliebigen Formel immer eine neue Formel berechnen kann, die dies tatsächlich ermöglicht. Hierfür sind auch einige Regeln notwendig, die man überall nachschlagen kann. Die Hauptregel möchte ich im folgenden Beispiel darstellen:

$$\boldsymbol{a^b \quad wird\,zu \quad b * a^{b-1}}$$

Zahlen ohne x fallen weg

Das sieht jetzt vermutlich sehr komplex aus, aber an dem folgenden Beispiel wird es sehr leicht nachvollziehbar sein:

$$f(x) = \ 4 * x^2 + 5 * x + 3$$

$$f'(x) = 4 * 2 * x^{(2-1)} + 5 * 1 * x\hat{}(1-1)$$

Jetzt verwenden wir die mathematischen Regeln, um alles etwas übersichtlicher zu schreiben:

$$f'(x) = 8 * x + 5$$

Jetzt können wir also beispielsweise für den x-Wert x=5 beispielsweise den y-Wert berechnen, indem wir 5 in die Funktion f einsetzen:

$$f(5) = 4 * 5^2 + 5 * 5 + 3 = 128$$

$$f'(5) = 8 * 5 + 5 = 45$$